7.О с т и а н у Н.М.,Рыжков В.В.,Швейкин П.И.Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-В кн.: Тр.геометр.семинара.М.,1973,т.4,с.7-68.

8.Н о р д е н А.П. Многочленные композиции и теория распределений.-Изв.вузов.Матем.,1978,№11,с.87-97.

9.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. Наука ,М.,1976.

А.М.Ш е л е х о в

О ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ТРИ-ТКАНИ

В работе [1] доказано,что если тензор кривизны три-ткани вполне кососимметричен по нижним индексам,то тензор кручения этой три-ткани ковариантно постоянен в средней связности.Такие три-ткани называются тканями Муфанг и [1] доказано,что локальная тройная система [2] тканей Боля относительно бинарной операции является алгеброй Мальцева [3].В этой заметке мы покажем,что ткани,которые характеризуются ковариантным постоянством тензора кручения относительно средней связности,не являются,вообще говоря,тканями Боля,но тем не менее указанная бинарная операция дает алгебру Мальцева.

1.Структурные уравнения три-ткани r-мерных поверхностей на дифференцируемом многообразии X, $\dim X = 2r$,могут быть записаны следующим образом (см.[4]):

$$\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i + \underset{3}{\omega}^i = 0, \tag{1}$$

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^k \wedge \omega_k^i + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^k \wedge \omega_k^i - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{2}$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b^i_{jk\ell} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell, \tag{3}$$

причем тензор кривизны $b^i_{jk\ell}$ и тензор кручения a^i_{jk} три-ткани связаны соотношениями:

$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|\ell|k]} \underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{[jk]\ell} \underset{2}{\omega}^\ell, \tag{4}$$

$$b^i_{[jk\ell]} = 2 a^m_{[jk} a^i_{|m|\ell]} \,. \tag{5}$$

В [I] получены следующие уравнения:

$$\overset{*}{\nabla} a^i_{jk} = \overset{*}{b}{}^i_{[jk]l}\,\underset{2}{\omega}{}^l - \overset{*}{b}{}^i_{[k|l|j]}\,\underset{1}{\omega}{}^l .$$

Здесь $\overset{*}{\nabla}$ -оператор ковариантного дифференцирования относительно средней связности и

$$\overset{*}{b}{}^i_{jkl} = b^i_{jkl} - b^i_{[jkl]} . \tag{6}$$

Условие ковариантного постоянства тензора a^i_{jk} относительно средней связности приводит к соотношениям $\overset{*}{b}{}^i_{[jk]l} = 0$, $\overset{*}{b}{}^i_{[k|l|j]} = 0$, откуда следует, что $\overset{*}{b}{}^i_{jkl} = \overset{*}{b}{}^i_{(jkl)}$. Но из (6) получаем, что $\overset{*}{b}{}^i_{(jkl)} = b^i_{(jkl)}$, поэтому (см. 6)

$$b^i_{jkl} = \overset{*}{b}{}^i_{jkl} + b^i_{[jkl]} = \overset{*}{b}{}^i_{(jkl)} + b^i_{[jkl]} = b^i_{(jkl)} + b^i_{[jkl]} .$$

Эти условия по другому можно записать так

$$b^i_{jkl} = \frac{1}{3}\left(b^i_{jkl} + b^i_{klj} + b^i_{ljk}\right). \tag{7}$$

Отсюда видно, что тензор b^i_{jkl} не меняется при циклической перестановке индексов. Это условие характеризует рассматриваемую три-ткань, которую мы назовем циклической и будем дальше обозначать T_k.

Из (7) следует $b^i_{[j|k|l]} = b^i_{[jk]l} = b^i_{[jkl]}$, поэтому уравнения (4) для три ткани T_k примут вид:

$$\nabla a^i_{jk} = 2\, a^m_{[jk}\, a^i_{|m|l]}\left(-\underset{1}{\omega}{}^l + \underset{2}{\omega}{}^l\right). \tag{8}$$

Мы будем продолжать уравнения (3) и (8). Дифференцируя уравнения (3), получим (см. [4]):

$$\nabla b^i_{jkl} = \bar{c}^i_{jklm}\,\underset{1}{\omega}{}^m + \tilde{c}^i_{jklm}\,\underset{2}{\omega}{}^m , \tag{9}$$

$$\tilde{c}^i_{jk[lm]} + b^i_{jkp}\, a^p_{lm} = 0 , \quad \bar{c}^i_{j[l|k|m]} = b^i_{jpk}\, a^p_{lm} , \tag{10}$$

причем тензоры $\bar{c}^i_{jklm}$ и $\tilde{c}^i_{jklm}$ выдерживают циклирование по первым трем нижним индексам. Внешнее дифференцирование уравнений (8) дает

$$2\nabla\left(a^m_{[jk}\, a^i_{|m|l]}\right)\left(-\underset{1}{\omega}{}^l + \underset{2}{\omega}{}^l\right) + 2a^m_{[jk}\, a^i_{|m|p]}\, a^p_{lq}\left(\underset{1}{\omega}{}^q \wedge \underset{1}{\omega}{}^l + \underset{2}{\omega}{}^q \wedge \underset{2}{\omega}{}^l\right) = c^i_{jklm}\,\underset{1}{\omega}{}^l \wedge \underset{2}{\omega}{}^m , \tag{11}$$

где положено

$$c^i_{jklm} = a^i_{pj}\, b^p_{klm} - a^i_{pk}\, b^p_{jlm} + a^p_{jk}\, b^i_{plm} .$$

Но, с учетом (8)

$$\nabla\left(a^m_{[jk}\, a^i_{|m|l]}\right) = \frac{1}{3}\left(\nabla a^m_{jk}\, a^i_{ml} + \nabla a^m_{kl}\, a^i_{mj} + \nabla a^m_{lj}\, a^i_{mk} + a^m_{jk}\nabla a^i_{ml} + a^m_{kl}\nabla a^i_{mj} + a^m_{lj}\nabla a^i_{mk}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(a^r_{[jk}\, a^m_{|r|s]}\, a^i_{ml} + a^r_{[kl}\, a^m_{|r|s]}\, a^i_{mj} + a^r_{[lj}\, a^m_{|r|s]}\, a^i_{mk} + a^m_{jk}\, a^r_{[ml}\, a^i_{|r|s]} + a^m_{kl}\, a^r_{[mj}\, a^i_{|r|s]} + a^m_{lj}\, a^r_{[mk}\, a^i_{|r|s]}\right)\left(-\underset{1}{\omega}{}^s + \underset{2}{\omega}{}^s\right).$$

После преобразований найдем, что

$$\nabla\left(a^m_{[jk}\, a^i_{|m|l]}\right) = B^i_{jkls}\left(-\underset{1}{\omega}{}^s + \underset{2}{\omega}{}^s\right), \tag{12}$$

где

$$B^i_{jkls} = \frac{2}{3}\left(A^i_{s\{jkl\}} + A^i_{\{j|s|lk\}} + A^i_{\{jkl\}s} + a^m_{\{jk}\, a^r_{l\}s}\, a^i_{rm}\right), \tag{13}$$

$$A^i_{jkls} = a^m_{jk}\, a^r_{ml}\, a^i_{rs}$$

и скобки { } означают циклирование, например,

$$A^i_{\{jkl\}s} = \frac{1}{3}\left(A^i_{jkls} + A^i_{kljs} + A^i_{ljks}\right).$$

С учетом (12) уравнения (11) примут вид:

$$2B^i_{jklq}\left(-\underset{1}{\omega}{}^q + \underset{2}{\omega}{}^q\right)\wedge\left(-\underset{1}{\omega}{}^l + \underset{2}{\omega}{}^l\right) + 2a^m_{[jk}\, a^i_{|m|p]}\, a^p_{lq}\left(\underset{1}{\omega}{}^q \wedge \underset{1}{\omega}{}^l + \underset{2}{\omega}{}^q \wedge \underset{2}{\omega}{}^l\right) = c^i_{jklq}\,\underset{1}{\omega}{}^l \wedge \underset{2}{\omega}{}^q .$$

Но $\underset{1}{\omega}^q \wedge \underset{1}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^q \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = (-\underset{1}{\omega}^q + \underset{2}{\omega}^q) \wedge (-\underset{1}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^\ell) + \underset{1}{\omega}^q \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^q \wedge \underset{1}{\omega}^\ell$, поэтому из последних уравнений, в силу независимости форм $(-\underset{1}{\omega}^q + \underset{2}{\omega}^q) \wedge (-\underset{1}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^\ell)$ и $\underset{1}{\omega}^q \wedge \underset{2}{\omega}^\ell$, получим:

$$B^i_{jk[\ell q]} + a^m_{[jk} a^i_{|m|p]} a^p_{\ell q} = 0, \tag{14}$$

$$c^i_{jk\ell q} = 4 a^m_{[jk} a^i_{|m|p]} a^p_{q\ell}. \tag{15}$$

Преобразуя соотношения (14) с помощью (13), получим

$$A^i_{qk\ell j} + A^i_{k\ell qj} + A^i_{jq\ell k} + A^i_{\ell jqk} + A^i_{jk\ell q} + A^i_{kjq\ell} + A^i_{q\ell kj} + A^i_{\ell qjk} = -a^i_{mr} a^m_{jk} a^r_{\ell q}. \tag{16}$$

Соотношения (15) эквивалентны двум сериям:

$$c^i_{jk[\ell q]} = 4 a^m_{[jk} a^i_{|m|q]} a^p_{q\ell}, \quad c^i_{jk(\ell q)} = 0.$$

Первые равенства с учетом обозначений дают

$$a^i_{mj} b^m_{k[\ell q]} - a^i_{mk} b^m_{j[\ell q]} + a^m_{jk} b^i_{m[\ell q]} = 4 a^m_{[jk} a^i_{|m|p]} a^p_{q\ell}.$$

Далее вспомним, что $b^m_{k[\ell q]} = b^m_{[k\ell q]}$, и тогда, воспользовавшись равенствами (5), получим:

$$a^i_{mj} a^p_{[k\ell} a^m_{|p|q]} - a^i_{mk} a^p_{[j\ell} a^m_{|p|q]} + a^m_{jk} a^p_{[m\ell} a^i_{|p|q]} = 2 a^m_{[jk} a^i_{|m|p]} a^p_{q\ell}.$$

Развернув эти соотношения, убедимся, что они совпадают с (16). Поэтому соотношения (15) эквивалентны тем, которые получаются из них симметрированием по ℓ, q, то есть

$$a^i_{mj} b^m_{k(\ell q)} - a^i_{mk} b^m_{j(\ell q)} + a^m_{jk} b^i_{m(\ell q)} = 0.$$

Но из (7) следует, что $b^i_{j(k\ell)} = b^i_{(jk\ell)}$, поэтому окончательно получаем

$$a^i_{mj} b^m_{(k\ell q)} - a^i_{mk} b^m_{(j\ell q)} + a^m_{jk} b^i_{(m\ell q)} = 0 \tag{17}$$

Итак, мы получили всего две серии конечных соотношений – (16) и (17), причем тензор кручения a^i_{jk} удовлетворяет соотношениям (16) и только им. Охарактеризуем теперь локальную тройную систему (ЛТС) ткани T_k.

Обозначим, как обычно, бинарную и тернарную операции в ЛТС через [ ] и ( ), так что

$$[xy]^i = a^i_{jk} x^j y^k, \quad (xyz)^i = b^i_{jk\ell} x^j y^k z^\ell.$$

Соотношения (16) в точности совпадают с соотношениями (33) или (37) работы [1], которые означают (это показано в [1]), что относительно бинарной операции ЛТС образует алгебру Мальцева.

Соотношения (17) приводят к следующим тождествам:

$$[((tyz)+(tzy))x] - [((xyz)+(xzy))t] = ([tx]yz) + ([tx]zy). \tag{18}$$

Так как тензор $b^i_{jk\ell}$ выдерживает циклирование, то

$$(xyz) = (yzx) = (zxy). \tag{19}$$

Поэтому соотношения (5) дают:

$$(xyz) - (xzy) = \frac{4}{3}\left([[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y]\right). \tag{20}$$

Результаты сформулируем в следующей теореме.

Т е о р е м а. Локальная тройная система, присоединенная к циклической три-ткани, относительно бинарной операции является алгеброй Мальцева. Тернарная операция в ЛТС инвариантна по отношению к циклированию и обе операции связаны тождествами (18) и (20).

З а м е ч а н и е 1. Если дважды проциклировать тождество (18) по x, y, t и полученные равенства сложить, получим:

$$([tx]yz) + ([tx]zy) + ([xy]tz) + ([xy]zt) + ([yt]xz) + ([yt]zx) = 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Дальнейшее дифференцирование равенств (16) не дает новых соотношений на тензор a^i_{jk}, а дифференцирование равенств (17) дает соотношения на ковариантные производные тензора $b^i_{jk\ell}$. Таким образом, никаких других тождеств, независимых от указанных в теореме, нет.

2. Укажем один характеристический признак ткани T_κ, связанный с ее локальными геодезическими лупами. Пусть T – произвольная три-ткань, уравнения которой имеют вид (1)–(5). Положим $\underset{1}{\omega}^i = 0$, тогда

$$d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^\kappa \wedge \omega^i_\kappa - a^i_{j\kappa}\, \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^\kappa, \quad d\omega^i_j = \omega^\kappa_j \wedge \omega^i_\kappa,$$

$$\nabla a^i_{j\kappa} = b^i_{[j\kappa]\ell}\, \underset{2}{\omega}^\ell .$$

Эти уравнения показывают, что аффинная связность, индуцированная на поверхностях первого семейства три-ткани, имеет нулевую кривизну ($R^i_{j\kappa\ell} = 0$), а тензор кручения этой связности $R^i_{j\kappa} = -a^i_{j\kappa}$. В работе [5] доказано, что тензор кривизны $\beta^i_{j\kappa\ell}$ локальной геодезической лупы, присоединенной к данной аффинной связности, имеет вид:

$$\beta^i_{j\kappa\ell} = R^i_{j\kappa\ell} - \nabla_\ell R^i_{j\kappa},$$

где ∇_ℓ – ковариантная производная в рассматриваемой связности. Для связности, индуцируемой на поверхностях первого семейства три-ткани, имеем $\overset{1}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = -b^i_{[j\kappa]\ell}$. Аналогичным способом находим, что на поверхностях второго семейства $\overset{2}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = b^i_{[j|\ell|\kappa]}$. Для поверхностей третьего семейства ($\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$) имеем:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^\kappa \wedge \omega^i_\kappa + a^i_{j\kappa}\, \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^\kappa, \quad d\omega^i_j = \omega^\kappa_j \wedge \omega^i_\kappa - b^i_{j[\kappa\ell]}\, \underset{1}{\omega}^\kappa \wedge \underset{1}{\omega}^\ell,$$

$$\nabla a^i_{j\kappa} = (b^i_{[j|\ell|\kappa]} - b^i_{[j\kappa]\ell}),$$

поэтому $\overset{3}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = -b^i_{j[\kappa\ell]} - (b^i_{[j|\ell|\kappa]} - b^i_{[j\kappa]\ell}) = b^i_{\kappa[\ell j]}$.

Т е о р е м а. Для циклических три-тканей (и только для них) тернарная операция в ЛТС каждой геодезической лупы, которая порождается аффинной связностью, индуцируемой на поверхностях ткани, является вполне кососимметричной.

Необходимость очевидна. Для три-тканей T_κ, пользуясь (7), получим: $\overset{1}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = -b^i_{[j\kappa]\ell} = -b^i_{[j\kappa\ell]}$;

$$\overset{2}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = -b^i_{[j|\ell|\kappa]} = b^i_{[j\ell\kappa]} = -b^i_{[j\kappa\ell]}; \quad \overset{3}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = b^i_{\kappa[\ell j]} = b^i_{[\kappa\ell j]} = b^i_{[j\kappa\ell]}.$$

Достаточность. Тензор $\overset{1}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell}$ будет вполне кососимметричен по нижним индексам, если, например, $\overset{1}{\beta}{}^i_{(j|\kappa|\ell)} = 0$, что дает $b^i_{[j\kappa]\ell} + b^i_{[\ell\kappa]j} = 0$. Тензоры $\overset{2}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell}, \overset{3}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell}$ вполне кососимметричны, если

$$b^i_{[j|\kappa|\ell]} + b^i_{[\kappa|j|\ell]} = 0, \tag{21}$$

$$b^i_{j[\kappa\ell]} + b^i_{\ell[\kappa j]} = 0. \tag{22}$$

Каждая из полученных трех серий соотношений является следствием двух других. Рассмотрим, например, соотношения (21) и (22), причем (21) запишем в виде

$$b^i_{j(\kappa\ell)} - b^i_{(\kappa\ell)j} = 0. \tag{23}$$

Известно следующее тождество

$$b^i_{j\kappa\ell} = b^i_{(j\kappa\ell)} + b^i_{[j\kappa\ell]} + \frac{2}{3}(b^i_{j[\kappa\ell]} + b^i_{\ell[\kappa j]}) + \frac{2}{3}(b^i_{j(\kappa\ell)} - b^i_{(\kappa\ell)j}).$$

В силу (22) и (23) отсюда следует (7), что доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. Так как для рассматриваемых геодезических луп ткани T_κ (обозначим их Q_α) тензор кручения $R^i_{j\kappa} = \pm a^i_{j\kappa}$, то бинарная операция в ЛТС этих луп дает алгебру Мальцева. Пользуясь (7), получаем

$$-\overset{1}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = -\overset{2}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = \overset{3}{\beta}{}^i_{j\kappa\ell} = b^i_{[j\kappa\ell]} = 2\, a^m_{[j\kappa}\, a^i_{|m|\ell]},$$

то есть тернарная операция в ЛТС луп Q_α выражается через бинарную. Из результатов работы [1] следует, что ЛТС геодезических луп Q_α устроена так же, как и ЛТС координатных луп ткани Муфанг. Однако это не означает, вообще говоря, что лупы Q_α будут лупами Муфанг.

Список литературы

1. А к и в и с М.А., Шелехов А.М. О локальных дифференцируемых квазигруппах. Сиб. мат. ж., 1971, 12, №6, 1182–1191

2.А к и в и с М.А. О локальных алгебрах многомерных три-тканей.-Сиб.мат.ж.,1976,17,№ 1,с.5-11

3.М а л ь ц е в А.И. Аналитические лупы.-Матем.сб., 1955,36,№ 3,с.569-575.

4.А к и в и с М.А. О три-тканях многомерных поверхностей.-Тр.геом.семинара,ВИНИТИ,т.2,М.,1969,с.7-31.

5.А к и в и с М.А. О геодезических лупах и локальных тройных системах пространства аффинной связности.-Сиб.мат.ж.,1978,19,№2,с.243-253.

Содержание